Fundamentos de Matemáticas

Julio Muñoz

Departamento de Matemáticas

Universidad de Castilla-La Mancha

30 de Septiembre de 2009

Índice general

1. Sistemas de ecuaciones lineales **5**

1.1. Introducción al Método de Gauss 5

1.1.1. Observaciones 10

1.2. Rango. Estructura de las soluciones de un sistema. 12

1.2.1. Operaciones y propiedades de los vectores 12

1.2.2. Independencia lineal entre vectores. 13

1.2.3. Teorema fundamental 15

1.2.4. Estructura de las soluciones 17

1.3. Aplicaciones lineales y operaciones con matrices. 20

1.3.1. Operaciones con aplicaciones lineales 23

1.4. Inversa de una matriz 25

1.5. Ejercicios 29

2. Determinantes **33**

2.1. Introducción. Definiciones 33

2.2. Propiedades de los determinantes 36

2.3. Inversa de una matriz y Regla de Cramer 39

2.4. Rango y resolución de sistemas 41

2.5. Ejercicios 44

3. Diagonalización. Sistemas Dinámicos **47**

3.1. Base y dimensión 47

3.1.1. Definiciones previas 47

3.1.2. Cambios de base 51

3.1.3. Cambio de base para las aplicaciones lineales 53

3.2. Forma diagonal 58

3.2.1. Cálculo de autovectores y autovalores 61

3.3. Sistemas Dinámicos 70

3.3.1. Ecuaciones en diferencias 70
3.3.2. Ecuaciones diferenciales 77
3.3.3. Solución general de un sistema lineal 79
3.3.4. Solución de un sistema mediante un cambio de variable 80
3.4. Ejercicios 83

4. Resolución de los ejercicios 89
4.1. Soluciones e indicaciones a los problemas del Capítulo I 89
4.2. Soluciones e indicaciones a los problemas del Capítulo II 103
4.3. Soluciones e indicaciones a los problemas del Capítulo III 110
4.3.1. Parte 1 110
4.3.2. Parte 2 118

Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Introducción al Método de Gauss

El objetivo es resolver sistemas de ecuaciones lineales con 2, 3 o más incognitas o/y ecuaciones. Por ejemplo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} -x+y=1 \\ 2x+y=7 \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Buscaremos su solución o soluciones, esto es, trataremos de encontrar un par de números x e y, o (x, y), tales que al ser sustituidos en el sistema anterior se verifiquen las dos igualadades o ecuaciones.
Para resolver el sistema vamos a proceder mediante multiplicaciones sobre las ecuaciones y mediante sumas entre las ecuaciones. Por ejemplo, en el sistema (1.1) multiplicamos por 2 a la primera y se la sumamos a la segunda, dejando la primera igual:

$$\left\{ \begin{array}{lll} -x & +y & =1 \\ & 3y & =9 \end{array} \right.$$

Ahora multiplicamos por 1/3 en la segunda para que nos dé

$$\left\{ \begin{array}{lll} -x & +y & =1 \\ & y & =3 \end{array} \right.$$

Si a la primera le restamos la segunda, dejando la primera invariable, queda

$$\left\{ \begin{array}{lll} -x & & =-2 \\ & y & =3 \end{array} \right.$$

Si ahora multiplicamos por -1 en la primera resulta que finalmente el sistema se transforma en

$$\left\{\begin{array}{lll} x & & = 2 \\ & y & = 3 \end{array}\right.$$

lo cual nos está dando explicitamente la solución del sistema (1.1): $x = 2$, $y = 3$.
Usemos las mismas reglas para un sistema en el que acordamos llamar a las incógnitas u, v y w. Digamos que queremos resolver el sistema de 3 ecuaicones y 3 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{llll} 2u & +v & +w & = 1 \\ 4u & +v & & = -2 \\ -2u & +2v & +w & = 7 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Restamos de la segunda ecuación la primera multiplicada por 2, y de la tercer, la primera multiplicada por -1 y dejamos la primera tal cual. El resultdado es

$$\left\{\begin{array}{llll} 2u & +v & +w & = 1 \\ & -v & -2w & = -4 \\ & 3v & +2w & = 8 \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Nos ocupamos ahora de las dos últimas ecuaciones. A la tercera le sumamos 3 veces la segunda y queda

$$\left\{\begin{array}{llll} 2u & +v & +w & = 1 \\ & -v & -2w & = -4 \\ & & -4w & = -4 \end{array}\right.$$

Y si ahora mulpilicamos por $-1/4$ la tercera tendremos de forma explícita el valor de w. Esto nos permitiría sustituir en la segunda ecuación y despejar v. Ya conoceríamos w y v, con esto iríamos a la primera para conocer u. Hacer este proceso de sustitución equivale a realizar seguir el mismo procedimiento que antes: estábamos en

$$\left\{\begin{array}{llll} 2u & +v & +w & = 1 \\ & -v & -2w & = -4 \\ & & w & = 1 \end{array}\right.$$

Ahora a la segunda le sumamos 2 veces la tercera y queda

$$\left\{\begin{array}{llll} 2u & +v & +w & = 1 \\ & v & & = 2 \\ & & w & = 1 \end{array}\right. ,$$

y si restamos a la primera la tercera y después la segunda, queda

$$\left\{\begin{array}{llll} 2u & & & = -2 \\ & v & & = 2 \\ & & w & = 1 \end{array}\right. . \tag{1.4}$$

Con esto llegamos a que la solución del sistema de partida es $u = -1$, $v = 2$ y $w = 1$.
Se observa que todo lo realizado se remite a multiplicar ecuaciones por números (distintos de cero) y a sumar y restar ecuaciones. En ocasiones puede resultatar cómodo alterar el orden de las ecuaciones. Sin embargo el aspecto más relevante, a efectos prácticos, es el hecho de que si posicionamos las incógnitas de cada ecuación por columnas, tal y como hemos hecho, entonces todas las operaciones realizadas para la resolución del sistema se han llevado a cabo sobre la caja de números con ordenación cuadarangular que define al sistema y que en adelante llamaremos matriz. Por ejemplo, el sistema (1.2) queda definido mediante la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Denotamos a la fila i−ésima por F_i y abreviamos la descripción de las operaciones del siguiente modo. Si a la segunda fila le hemos restado dos veces la primera escribiremos $F_2 - 2F_1$, y si a la tercera le sumamos la primera escribiremos $F_3 + F_1$. Hecho esto pasaremos de la matriz inicial a otra que representa a un sistema equivalente (equivalente en el sentido de que sus soluciones, de tenerlas, son las mismas). Así pues

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

donde la segunda matriz es la que representa al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2u & +v & +w & = 1 \\ & -v & -2w & = -4 \\ & 3v & +2w & = 8 \end{array} \right.$$

Seguidamente hacemos $F_3 + 3F_2$ logrando así

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

A continuación, y de manera sintética, hacemos el resto de las operaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \underset{-(1/4)F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2+2F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1-F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1/2, -F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que la matriz final obtenida tiene como sistema asociado a (1.4), sistema que como se ve tiene de particular el hecho de que su solución es automática. Esto viene dado por la estructura de la matriz a la que hemos llegado, la matriz equivalente más sencilla. Es una matriz que se consigue haciendo ceros por debajo, fila a fila, hasta llegar a una matriz que se caracteriza por la posibilidad de trazar sobre ella una especie de escalera con tantos peldaños por fila, de altura uno, debajo de los peldaños todo es cero, y en cada esquina de cada peldaño hay un uno y por encima de él todo es cero. Es tipo de matriz al que llegamos después de realizar las operaciones equivalentes se llama matriz escalonada.

Una cuestión importante a plantear es saber qué sucede con un sistema carente de soluciones cuando uno procede como antes. ¿Cuál ha de ser la estructura final de la matriz equivalente a la que llegamos? Nótese que para el sistema (1.2), el cual es un sistema que tiene solución, y sólo una, hemos llegado a una matriz equivalente en la que se podía despejar explícitamente el valor de las incógnitas. ¿Qué ocurrira para un sistema sin soluciones? Veamos esto en el siguiente caso. Pongamos el sistema

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & -x_2 & +x_3 & =1 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & =0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & =3 \end{array}\right. \tag{1.5}$$

La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Operemos sobre ella:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{-2F_1+F_2 \\ -2F_1+F_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{(1/3)F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1+F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema equivalente es

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & & +(2/3)\,x_3 & =1/3 \\ & +x_2 & -(1/3)\,x_3 & =-2/3 \\ & & 0 & =1 \end{array}\right.$$

lo cual es imposible que tenga lugar pues hemos llegado a que $0=1$. La conclusión es que como este sistema no se cumple, (1.5) no tiene solución. en esta ocasión el número de peldanos es dos si sólo se tienen en cuenta los coeficientes que acompañan a las incógnitas (los que forman lo que se llama la matriz de coeficientes) Sin embargo, para la matriz completa, áquella que incluye a los términos independientes (matriz ampliada), el número de peldaños es 3.

Analicemos ahora el tipo de matrices equivalentes que se obtiene para un sistema que tiene infinitas soluciones. Estudiamos el sistema cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Tenemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2+2F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2-7F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora permutamos la segunda y tercera fila ($F_2 \leftrightarrow F_3$) y continuamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2\leftrightarrow F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{9}F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2+F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1-F_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1-3F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El proceso ha llegado a su fin ya que cualquier otra operación no supondría obtener una matriz más sencilla (con más ceros). Por ello escribimos el sistema correspondiente:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -3 \\ x_2 &= 1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Podemos despejar de manera explícita el valor de x_2 y x_4 pero no el valor de las otras dos incógnitas. Por ello se despeja x_1, por ejemplo, en función de x_3 y se supone que x_3

puede tomar cualquier valor real: así tendremos que

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda - 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

es la solución general del sistema anterior. Puesto que λ puede ser cualquier valor de $\mathbb{R}$ existrán infinitas soluciones para el sistema (1.6). Por ejemplo, con $\lambda = 0$ obtenemos la solución $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ y $x_4 = 1$, si $\lambda = 2{,}5$ entonces otra solución es $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2{,}5$ y $x_4 = 1$, y así para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que el número de peldaños es 3 tanto para la matriz de coeficientes como para la ampliada y el número de incógnitas es 4.

1.1.1. Observaciones

1. Si todos los términos que no van multiplicados por una incógnita (los términos independientes) son cero entonces la columna de la derecha de la matriz asociada es una columna de ceros. Además, en esta situación se da siempre solución trivial, aquélla en la que todas las incógnitas son cero. Durante las operaciones elementales eliminaremos la última columna (columna de ceros) de la matriz asociada.

2. Con un poco de sentido común no debe costarnos pensar que si uno dispone de un sistema con muchas incógnitas, más que ecuaciones, entonces el sistema de ecuaciones tiene muchas posibilidades de tener solución. Las incógnitas le dan al sistema más posibilidades para que las ecuaciones que éste define puedan satisfacerse de alguna manera.

3. Si lo que tenemos es un sistema con muchas ecuaciones en comparación con el número de incógnitas, entonces es bastante intuitivo pensar que hay pocas posibilidades de que exista solución.

Analizar estas observaciones previas no es difícil. Veámoslo para el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & =7 \\ 2x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -7x_4 & =1 \\ -4x_1 & -4x_2 & +7x_3 & -11x_4 & =-13 \end{array} \right. \tag{1.7}$$

Escribimos la matriz asociada y las operaciones:

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 5 & -7 & 1 \\ -4 & -4 & 7 & -11 & -13 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & -2 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & -8 & 17 & -25 & -11 \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow[+3F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & -6 & 15 & -21 & 3 \\ 0 & -8 & 17 & -25 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2-2F_1]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & 17 & -25 & -11 \\ 0 & -8 & 17 & -25 & -11 \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow[F_3-F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & 17 & -25 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}
$$

Y para finalizar

$$
\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & 17 & -25 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{8}F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{17}{8} & \frac{25}{8} & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow[F_1-F_2]{} \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{8} & \frac{-9}{8} & \frac{45}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{8} & \frac{25}{8} & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1/3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{15}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{8} & \frac{25}{8} & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Luego las soluciones se expresan como

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{15}{8} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 \\
x_2 &= \frac{11}{8} + \frac{17}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4
\end{aligned}
$$

con x_3 y x_4 cualesquiera. Para el ejemplo (1.7) observamos que el número de peldaños de la escalera es 2, tanto para la matriz completa como para la matriz que resulta de excluir a la última columna. El número de incógnitas es 5, mayor que el número de peldaños.

A tenor de lo obtenido a lo largo de esta sección cabe plantearse cuál el aspecto fundamental que hace que un sistema tenga o no tenga solución. Este asunto lo trataremos en la siguiente sección y como veremos, estará directamente relacionado con el rango o con lo que antes hemos descrito como el número de peldaños.

También nos plantearemos qué ocurre cuando el número de ecuaciones o/y el número de incógnitas es muy grande. ¿Podremos realizar el procedimiento descrito antes con cierta eficiencia? La respuesta es en general no. Aunque el método está capacitado para dar con la estructua de las soluciones del sistema, sin la ayuda de un ordenador no podremos resolver en un tiempo prudencial. El paquete informático o conjunto de programas que usaremos para solventar esto es MATLAB.

1.2. Rango. Estructura de las soluciones de un sistema.

Hemos visto que las soluciones de un sistema pueden escribirse de la forma $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, ..., x_n = a_n$, donde cada a_i es un número real. Estas n incógnitas del sistema pueden expresarse de manera equivalente como $(x_1, ..., x_n) = (a_1, ..., a_n)$. Podemos decir incluso que el conjunto al que pertenecen estas n incógnitas es $\mathbb{R}^n$ donde

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ..., n\}.$$

Cada elemento $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de vector y se escribirse bajo la notación

$$\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n)$$ [1]

Además, podremos establecer que dos vectores $\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1, ..., b_n)$ son iguales si, y solo si, $a_i = b_i$ para $i = 1, ..., n$. El vector cero, el cual denotamos por $\overrightarrow{0}$, no es otro que $\overrightarrow{0} = (0, ..., 0)$.
La introducción de los conjuntos $\mathbb{R}^n$ para nuestro estudio es importante. Así, en la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

aparecen los vectores fila $(1, 2, 0, 1)$, $(2, 1, 3, 0)$ y $(-1, 2, -1, 1)$ pertenecientes todos al conjunto $\mathbb{R}^4$. También podemos escribir la misma matriz observando que ésta se compone de los cuatro vectores columna de $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.1. Operaciones y propiedades de los vectores

En $\mathbb{R}^n$ sean $\overrightarrow{a} = (a_1, ..., a_n)$ y $\overrightarrow{b} = (b_1, ..., b_n)$ dos vectores cualesquiera y λ cualquier número real. En estas circunstancias se define:

1. la suma de $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$, y se denota por $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, como el vector

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

---

[1] Tambin se puede optar por escribir los vectores como columnas, esto es $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

2. la multiplicación del número λ por $\overrightarrow{a}$, y se denota por $\lambda\overrightarrow{a}$, como el vector

$$\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n).$$

Con estas dos operciones, suma entre vectores y multiplicación por escalares (quiere decir multiplicación por números reales) se cumplen una serie de propiedades:

PROPOSICIÓN 1.1 *Para cualesquieran que sean los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ de $\mathbb{R}^n$, y cualesquiera que sean los números reales λ y μ, se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
2. $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$
3. $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$
4. $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$, *siendo* $(-\overrightarrow{a}) = (-1)\overrightarrow{a}$
5. $\lambda\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
6. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$
7. $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$
8. $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

Es importante notar que las operaciones + y $\cdot$ producto que acabamos de definir son exactamente las que se corresponden con la suma entre filas y las multiplicaciones de una fila por un número.

1.2.2. Independencia lineal entre vectores.

Un combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ..., \overrightarrow{a}_n$ es una expresión de la forma

$$c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_n\overrightarrow{a}_n$$

donde los c_i son todos números reales. Un vector $\overrightarrow{a}$ $(\neq \overrightarrow{0})$ se dice que es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ..., \overrightarrow{a}_n$ si existen $c_1, c_2, ..., c_{n,}$ n numeros reales, tales que

$$\overrightarrow{a} = c_1\overrightarrow{a}_1 + c_2\overrightarrow{a}_2 + ... + c_n\overrightarrow{a}_n$$

DEFINICIÓN 1.1 *1. Los vectores* $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ..., \overrightarrow{a}_n$ *son linealmente dependientes (l.d.) si existen* $d_1, ..., d_n$*, no todos cero, tales*

$$d_1 \overrightarrow{a}_1 + d_2 \overrightarrow{a}_2 + ... + d_n \overrightarrow{a}_n = \overrightarrow{0}$$

2. Los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ..., \overrightarrow{a}_n$ *son linealmente independientes (l.i.) si no don l.d., o lo que es lo mismo, si se cumple la relación de equivalencia siguiente:*

$$d_1 \overrightarrow{a}_1 + d_2 \overrightarrow{a}_2 + ... + d_n \overrightarrow{a}_n = \overrightarrow{0} \text{ sii } d_1 = d_2 = ... = d_n = 0. \tag{1.9}$$

EJEMPLO 1.1 *Examinamos si los vectores*

$$\overrightarrow{a}_1 = (1,1,3), \ \overrightarrow{a}_2 = (0,1,2) \text{ y } \overrightarrow{a}_3 = (1,2,5)$$

son l.i. Estudiamos para ello la igualdad

$$d_1 \overrightarrow{a}_1 + d_2 \overrightarrow{a}_2 + d_3 \overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{0},$$

esto es

$$d_1(1,1,3) + d_2(0,1,2) + d_3(1,2,5) = (0,0,0),$$

o lo que es lo mismo, vemos si se verifican las igualdades

$$\left\{ \begin{array}{llll} d_1 & & +d_3 & = 0 \\ d_1 & +d_2 & +2d_3 & = 0 \\ 3d_1 & +2d_2 & +5d_3 & = 0 \end{array} \right. \tag{1.10}$$

Esto es un sistema como los de la sección anterior, con la particularidad de que todos son términos independientes son cero (se dice que es un sistema lineal homogéneo). Empleamos el Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que significa que

$$\begin{array}{rcl} d_1 & = & -d_3 \\ d_2 & = & -d_3 \end{array}$$

y d_3 *libre. Esto implica que además de la trivial, hay infinitas soluciones, y por ende que (1.9) no se cumple. Los vectores dados son pues l.d. Por ejemplo, con* $d_3 = 4$ *podemos tomar* $d_1 = -4$ *y* $d_2 = -4$ *para obtener*

$$(-4)\overrightarrow{a}_1 + (-4)\overrightarrow{a}_2 + 4\overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{0}.$$

Definición 1.2 *Se llama rango de un conjunto de vectores al mayor número de ellos que son l.i. Se define el rango de una matriz A, y se denota como $r(A)$, al rango de sus vectores columna.*

Ejemplo 1.2 *Según hemos visto antes la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ no puede tener rango 3 pues los tres vectores columna que la forman no son l.i. habríaa que ver entonces si entre esos tres hay dos que sí sean l.i. Por ejemplo, tomemos $\overrightarrow{a}_1$ y $\overrightarrow{a}_2$. Al hacer $d_1\overrightarrow{a}_1 + d_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{0}$ se obtiene un sistema homogéneo cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Además*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lo que establece que $d_1 = d_2 = 0$. Por tanto son l.i. y $r(A) = 2$. Nótese que en realidad hemos hecho las mismas operaciones que hacíamos con toda la matriz. Tales operaciones se corresponden con las que hacíamos con las dos primeras columnas de la matriz. Por tanto podemos decir que haciendo las operaciones elementales con toda la matriz podemos descubrir cuántos vectores columna son l.i.

1.2.3. Teorema fundamental

El siguiente resultado es el teorema fundamental para el estudio de los sitemas de ecuaciones lineales. Antes de enuciarlo hemos de dar una serie de definiciones.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. , \tag{1.11}$$

desingamos por A a la matriz de los coeficientes y por $\overline{A}$ a la matriz ampliada, que es la de los coeficientes junto con los términos independientes. Esto es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Diremos que el sistema (1.11) es compatible determinado si tiene solución única. Se dirá que compatible indeterminado si tiene infinitas soluciones, y que es incompatible si no tiene solución.

TEOREMA 1.2 (ROUCHÉ-FROBENIUS) *Se cumple:*

1. *El sistema (1.11) es compatible determinado (CD) sii* $r(A) = r(\overline{A}) = n$.
2. *El sistema (1.11) es compatible indeterminado(CI) sii* $r(A) = r(\overline{A}) < n$.
3. *El sistema (1.11) es incompatible (I) sii* $r(A) < r(\overline{A})$.

Resulta así que si queremos saber si un sistema tiene solución, sin tener necesidad de calcularla en caso de que exista, el medio para ello es el cáclulo de los rangos de las matrices A y $\overline{A}$. No obstante, para el cálculo del rango hemos de hacer una combinación lineal, igualarla al vector cero, resultando un sistema homogéneo cuya matriz es igual a la del sistema. Por consiguiente no nos queda más remedio que realizar operaciones elementales hasta que seamos capaces de conocer el número de soluciones. No obstante existe un resultado impresionante por la relación que establece y no menos por su practicidad a la hora de determinar el rango. Es el siguiente:

TEOREMA 1.3 *El rango de un matriz coincide con el número de peldaños de su matriz escalonada.*

Este resultado permite reescribir el Teorema de Rouché-Frobenius en términos de númerode peldaños de matrices escalonadas. Analizaremos esto en el Ejemplo 1.3.
Nótese que si el vector columna

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

coincide con el vector $\overline{0}$ (esto es $b_i = 0$ par $i = 1, ...n$) entonces el sistema recibe el nombre de sistema lineal homogéneo. Un sistema homogéneo nunca es incompatible ya que siempre se cumple $r(A) = r(\overline{A})$. ¿Por qué?

EJEMPLO 1.3 *Analizamos los ejemplos vistos en Sección 1.*

1.2.4. Estructura de las soluciones

Estudiemos las relaciones entre las distintas soluciones de un sistema. Empezamos analizando un sistema lineal homogéneo: sea pues

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. \tag{1.12}$$

Sabemos que $\overline{x} = \overline{0}$ es solución siempre pero, ¿existen más soluciones? ¿Cuándo? La primera propiedad relacionada con esto es que si tiene más de una solución entonces tiene infinitas.

Proposición 1.4 *1. Si $\overline{z}$ es solución de (1.12) entonces también lo es $\lambda\overline{z}$, para cualquiera que sea $\lambda \in \mathbb{R}$.*

2. Si $\overline{w}$ y $\overline{z}$ son soluciones de (1.12) entonces también lo es $\overline{w} + \overline{z}$.

Demostrar esta proposición es un ejercicio que se deja para el lector. Esudiemos ahora cuántos son los grados de libertad de que disponemos cuando, además de la solución trivial, (1.12) tiene infinitas. Comenzamos con un ejemplo.

Ejemplo 1.4 *Sea el sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_2 + F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{2F_2, 3F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 & -3 & 6 \\ 6 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1 + F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 + F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -5/9 & 5/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con ello obtenemos la forma deseada para poder despejar:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_2 &= \frac{5}{9}x_3 - \frac{5}{9}x_4 + \frac{2}{3}x_5 \end{aligned}$$

sienddo x_3, x_4*y* x_5 *variables que quedan libres, es decir que las soluciones son*

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}s - \frac{1}{3}t \\ x_2 = \frac{5}{9}s - \frac{5}{9}t + \frac{2}{3}u \\ x_3 = s \\ x_4 = t \\ x_5 = u \end{cases}$$

con s, t *y* u *números reales cualesquiera. Tamién podemos dar la seguiente escritura a la solución general que acabamos de obtener. No es difícil ver que*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son tres las variables que quedan libres, s, t *y* u, *que es el mismo número de vectores que aparecen en la solución. Además, se puede comprobar que el rango de la matriz es dos y que el número de incógnitas es cinco. Hay una relación entre estos números,* $3 = 5 - 2$. *Este hecho no es una casualidad y se verifica para todos los sistemas (CI) que hemos estudiado hasta este momento. De hecho tenemos el siguiente resultado:*

Teorema 1.5 *Si el sistema (1.12) es indeterminado, entonces existen* k*vectores* $\overrightarrow{u}_1, ..., \overrightarrow{u}_k$ *l.i. tal que todas las soluciones de (1.12) son de la forma*

$$c_1\overrightarrow{u}_1 + ... + c_k\overrightarrow{u}_k,$$

con c_1, c_2,..., c_k *números reales. Además*

$$k = n - r(A) \tag{1.13}$$

Veamos a continuación como es la estructura cunado el sistema es no homogéneo. Sea pues el sistema de m ecuaciones y n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.14}$$

Si $\overrightarrow{v}$ es una solución particular de (1.14) y $\overrightarrow{u}$ es una cualquiera del mismo, entonces se puede ver que $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ es solución general de (1.12)(basta para ello hacer variar $\overrightarrow{u}$). Además

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$$

Esto significa que toda solución de (1.14) se puede escribir como la suma de una solución particular de (1.14) más la solución general de (1.12). Más concretamente,

Teorema 1.6 *Sea $\overrightarrow{v}$ una solución particular de (1.14). Entonces existen vectores l.i. $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_k$, tal que todas las soluciones de (1.14) se pueden escribir como*

$$\overrightarrow{v}+c_1\overrightarrow{u}_1+c_2\overrightarrow{u}_2+...+c_k\overrightarrow{u}_k$$

donde $c_j\in\mathbb{R}$ y los vectores $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, ..., \overrightarrow{u}_k$ son las k soluciones del sistema homogéneo asociado (1.12). Además $k=n-r(A)$.

En este contexto, a $\overrightarrow{v}+c_1\overrightarrow{u}_1+c_2\overrightarrow{u}_2+...+c_k\overrightarrow{u}$ se la denomina la solución general del sistema (1.14) y a $c_1\overrightarrow{u}_1+c_2\overrightarrow{u}_2+...+c_k\overrightarrow{u}$ la soución general de (1.12).

Ejemplo 1.5 *Examinemos cómo quedan las soluciones de algunos de los ejemplos previos:*

1. *En el caso en el que la matriz ampliada es (1.6) llegábamos a que toda solución se escribe como*

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda-3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

con λ cualquier número real, y esto en términos vectoriales se expresa como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que la forma específica de solución general señalada en el Teorema previo.

2. *En el caso del sistema (1.7) la solución general eracomo*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{15}{8} - \frac{3}{8}x_3 + \frac{3}{8}x_4 \\ x_2 &= \frac{11}{8} + \frac{17}{8}x_3 - \frac{25}{8}x_4 \end{aligned}$$

con x_3 *y* x_4 *cualesquiera. Podemos reescribir esto del siguiente modo: si empleamos la notación por columnas queda*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{15}{8} - \frac{3}{8}s + \frac{3}{8}t \\ \frac{11}{8} + \frac{17}{8}s - \frac{25}{8}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{15}{8} \\ \frac{11}{8} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{17}{8} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3. Aplicaciones lineales y operaciones con matrices.

Sean S y T dos conjuntos. Toda ley que asocia a cada elemento S uno de T, y sólo uno, se llama aplicación de S en T. Si a tal aplicación la denominamos f, entonces acordaremos en escribir

$$\begin{aligned} f: \quad S &\rightarrow T \\ s &\rightarrow f(s) = t \end{aligned}$$

Diremos que $f$es suprayectiva si $f(S) = T$,i.e. si para todo $t \in T$ existe $s \in S$ tal que $f(s) = t$.Téngase en cuenta que

$$f(S) = \{f(s) : s \in S\}$$

Decimos que $f$es inyectiva si para todo par de elementos distintos s y s'de S se tienen imágenes distintas, i.e. $f(s) \neq f(s')$,o de otra manera, f es inyectiva si se verifica la relación sigueinte:

$$f(s) = f(s') \text{ sii } s = s'.$$

Cuando f es a la vez inyectiva y suprayectiva se dice que es una biyección entre S y T. Una operación importante entre aplicaciones es la composición: sean las aplicaciones $f : S \rightarrow T$ y $g : T \rightarrow U$; se define la composición de g con f, y se escribe $g \circ f$, como aquella que se define del modo siguiente:

$$\begin{aligned} g \circ f: \quad S &\rightarrow U \\ s &\rightarrow (g \circ f)(s) = g(f(s)) \end{aligned}$$

Nótese que para que la composición tenga sentido basta con que el conjunto $f(S)$ esté incluido en T.
Una forma de definir una aplicación entre los conjuntos $\mathbb{R}^n$ es mediante el uso de matrices. Veamos un ejemplo.

Definimos la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (x-y, 2x-10y) \end{array}$$

Vemos que para que el vector $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$ esté en la imagen de esta aplicación debe ocurrir que

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y = b_1 \\ 2x - 10y = b_2 \end{array} \right.$$

Esto quiere decir que debe haber solución para us sistema lineal cuya matriz ampliada asociada es

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & b_1 \\ 2 & -10 & b_2 \end{array} \right)$$

Podemos generalizar: dada una matriz, de m filas y n columnas

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right)$$

definimmos la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (x,y) & \to & \left(\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, & \cdots & , a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array} \right) \end{array}$$

A esta aplicación la llamaremos **aplicación lineal** asociada a la matriz A, de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Es preciso notar que para que sea de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ la matriz ha de ser de m filas y n columnas. Coloquialmente se dice una matriz $m \times n$; en tal caso se dirá que la matriz A pertence al conjunto de todas las matrices $m \times n$ con coeficientes realeso o, bajo la notación matemática estándar, se escribirá $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

PROPOSICIÓN 1.7 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. entonces para todo $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ de $\mathbb{R}^n$ y todo λ de $\mathbb{R}$ se verifica*

1. $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$,

2. $f(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x})$.

EJEMPLO 1.6 *Sea la aplicación lineal que va de* $\mathbb{R}^2$ *a* $\mathbb{R}^2$ *y cuya matriz asociada es*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que en tal situación

$$f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

y que f *se corresponde con una transformación que consiste en realizar una simetría con respecto a la recta* $x_1 = x_2$ *de* $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 1.7 *Sea la aplicación lineal que va de* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^3$ *y cuya matriz asociada es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$$

esto es, se trata de la tranformación que consiste en asignar a todo punto de $\mathbb{R}^3$ *su proyección ortogonal sobre el plano* $x_3 = 0$.

EJEMPLO 1.8 *Sea la aplicación lineal que va de* $\mathbb{R}^3$ *a* $\mathbb{R}^3$ *y cuya matriz asociada es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$$

esto es, se trata de la tranformación que consiste en asignar a todo punto de $\mathbb{R}^3$ *su simétrico con respecto al plano* $x_3 = 0$.

Acabamos de ver como dad una matriz podemos construir una aplicación lineal. Ahora veremos cómo de una aplicación f que cumple las propopiedades de la Proposición 1.7 obtenemos una matriz.

PROPOSICIÓN 1.8 *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una aplicación tal que para todo* $\overrightarrow{x}$ *e* $\overrightarrow{y}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *y todo* λ *de* $\mathbb{R}$ *se verifica*

1. $f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$,

2. $f(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x})$.

Entonces f *es una aplicación lineal cuya matriz asociada* A *tiene por vectores columna a los vectores* $f(\overrightarrow{e}_1)$, $f(\overrightarrow{e}_2), ..., f(\overrightarrow{e}_n)$, *donde*

$$\overrightarrow{e}_j = \left(0, 0, ..., 0, \overset{j)}{1}, 0, ..., 0\right)$$

Ejemplo 1.9 *Sea la aplicación* $f(x,y) = (x-y, 2x-10y)$. *Se puede ver que es lineal y que la matriz asociada es la que tiene por columnas a*

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{e}_1) &= f(1,0) = (1,2), \\ f(\overrightarrow{e}_2) &= f(0,1) = (-1,-10) \end{aligned}$$

esto es, f *tiene como matriz asociada a*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -10 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1.1 *Se puede demostrar que la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que consiste en realizar una simetría con respecto a la recta* $x_2 = 0$, *tiene como matriz a*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.3.1. Operaciones con aplicaciones lineales

Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos aplicaciones lineales cualesquiera y c yn número real cualquiera. Se define

1. la suma de f y g como la aplicación $f+g$ tal que

$$(f+g)(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x}),$$

2. la multiplicación de λ por f como la aplicación λf tal que

$$(\lambda f)(\overrightarrow{x}) = \lambda(f(\overrightarrow{x})).$$

Se puede probar que las nuevas aplicaciones $f+g$ y λf son aplicaciones lineales. También es cierto que si f y g tienen como matrices asociadas a A y a B respectivamente, entonces $f+g$ tiene como matriz asociada a la matriz

$$C = A + B$$

donde si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces $C = (c_{ij})$ con $c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$. Del mismo modo la matriz asociada a λf es $D = (d_{ij})$ con $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.
La matriz C se dice que es el resultado de sumar las matrices A y B, y D es la matriz resultado de multiplica a la matriz A por el número λ.
Debemos resaltar que existe una correspondencia biunívoca entre las aplicaciones lineales y las matrice, por ello las operaciones entre aplicaciones lineales y propiedades pueden estudiarse en términos de matrices. Las más importantes son las siguientes:

$f+g=g+f$	$A+B=B+A$
$(f+g)+h=f\,(g+h)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
$0+f=f+0=f$	$\mathbf{0}+A=A+\mathbf{0}=A$
$f+(-f)=0$	$A+(-A)=\mathbf{0}$
$\lambda\,(f+g)=\lambda f+\lambda g$	$\lambda\,(A+B)=\lambda A+\lambda B$
$\lambda\,(\mu f)=(\lambda\mu)\,f$	$\lambda\,(\mu A)=(\lambda\mu)\,A$
$1f=f$	$1A=A$

Existe otra operación importante entre aplicaciones lineales, la composición. Supongamos que f y g son aplicaciones lineales de$\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices asociadas son

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Entonces la aplicación $h = g \circ f$ también es una aplicación lineal y la matriz asociada a h es

$$C = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

La matriz C la definiremos como la matriz que resulta de multiplicar B por A, esto es $C = BA$.
Lo mismo ocurre con el caso general. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con matriz A y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con mariz B, entonces $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ tiene como matriz a $C = BA$, donde BA se define como una matriz de p filas y n columnas cuyo elemento genérico ij se puede escribir como

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

Las propiedades de la operación composición se puede escribir en términos de multiplicación de matrices: sean f, g y h tres aplicaciones lineales cualesquiera, con matrices A, B y C, de forma que las composiciones que siguen tengan sentido. Entonces se cumple:

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$	$(CB)\, A = C\, (BA)$
$h \circ (f + g) = h \circ f = +h \circ g$	$C\, (A + B) = CA + CB$
$(h + g) \circ f = h \circ f + g \circ f$	$(C + B)\, A = CA + BA$
$(\lambda g) \circ f = \lambda\, (g \circ f) = g \circ (\lambda f)$	$(\lambda B)\, A = \lambda\, (BA) = B\, (\lambda A)$

Nota 1.1 *El sistema*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

puede escribirse vectorialmente con ayuda de la definición que hemos dado entre matrices. Así es, el sistema dado es equivalente a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ó más simplificado

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Nota 1.2 *En adelante identificaremos cada aplicación lineal f con su matriz asociada A y esciribiremos $f \leftrightarrow A$. Además haremos*

$$f\,(\overrightarrow{x}) = A\overrightarrow{x}$$

aunque el resultado aparezca como vector fila en lugar de vector columna.

1.4. Inversa de una matriz

Dada una aplicación $f : S \to T$, decimos que $g : T \to S$ es su inversa si

$$g \circ f\,(s) = s \text{ para todo } s \in S$$

y

$$f \circ g\,(t) = t \text{ para todo } t \in T$$

Si definimos la aplicación identidad en S como $I_S\,(s) = s$ para todo $s \in S$ y la identidad en T como $I_T\,(t) = t$ para todo $t \in T$, entonces g es la inversa de f si

$$g \circ f = I_S \text{ y } f \circ g = I_T$$

NOTA 1.3 *Si existe la aplicación inversa de ina aplicación entonces ésta es única.*

NOTA 1.4 *Una aplicación posee inversa si y sólo si es una biyección.*

Supongamos ahora que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal. Si f^{-1} es su inversa entonces f^{-1} también es lineal. Además f^{-1} también será invertibe y su aplicación inversa será f, esto es

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal invertible (quiere decir que posee inversa) tal que $f \leftrightarrow A$, entonces f^{-1} tiene como matriz asociada a una matriz B que cumple

$$AB = BA = I$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

A B se la llama la matriz inversa de la matriz A y se denota por $B = A^{-1}$

EJEMPLO 1.10 *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

y supongamos que su matriz inversa existe y es la matriz $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. *Entonces está claro que ha de cumplirse*

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto equivale a resolver el sistema (desacoplado) de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{array}\right.$$

Descomponemos el problema en dos sistemas. El primero es

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_3 = 0 \end{array}\right.$$

Su resolución se realiza mediante el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

lo que nos da los valores de x_1 y x_3.
Resolvemos el segundo sistema, pero observamos que la matriz asociada es igual que la del sistema previo si no es por la columna de coeficientes independientes. En el primero era $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right)$ *y en el segundo* $\left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)$*. Como consecuencia el proceso de resolución (operaciones elementales) es idéntico en ambos casos. Si lo hacemos sobre*

$$\left\{\begin{array}{c} 2x_2 + x_4 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 = 1 \end{array}\right.$$

tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

De resultas la matriz inversa es

$$B = \left(\begin{array}{cc} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 \end{array}\right)$$

Conviene insistir en el hecho de que el cáculo se ha repetido. Una forma de llevarlo a cabo con independencia de las columnas de términos independientes que pongamos es ésta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos pues que para calcular la inversa de una matriz A, $n \times n$, hemos de transformar la matriz $\left(A \vdots I_n\right)$ en $\left(I_n \vdots B\right)$ para concluir que $A^{-1} = B$ (aquí I_n deonota la matriz identidad $n \times n$)
Para decidir si una matriz A posee o no inversa basta con observar lo siguiente: si B fuera la inversa enontonces cada sistema

$$A\overrightarrow{b}_j = \overrightarrow{e}_j, \quad j = 1, ...n$$

sería compatible determinado y su solución, $\overrightarrow{b}_j$, tendría que ser la columna j-ésima de B. Puesto que estos sistemas son $n \times n$ el rango de A ha der n. Y al revés, si $r(A) = n$ entonces todos los sistemas poseen solución única, lo cual significa que $B = A^{-1}$ existe. Decimos esto de manera más precisa en el siguiente teorema:

TEOREMA 1.9 *Una matriz A de orden $n \times n$ posee inversa sii $r(A) = n$.*

PROPOSICIÓN 1.10 *Si $f : S \rightarrow T$ y $g : T \rightarrow U$ son aplicaciones invertibles y f^{-1} y g^{-1} son sus respectivas aplicaciones inversas, entonces $g \circ f$ es invertible y su inversa, $(g \circ f)^{-1}$, se expresa*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Esta proposición tiene una lectura particular en el cado de aplicaciones son lineales o matrices: si A y B son matrices invertibles, entoces también lo es BA y además $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

NOTA 1.5 *Podemos emplear la inversa de una matriz para expresar la solución de un sistema de ecuaciones. Sea el sistema $n \times n$*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ó más simplificado

$$A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}.$$

Si multiplicamos por la izquierda en esta igualdad por la matriz A^{-1} *queda lo siguiente:*

$$A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b},$$

pero $A^{-1}A = I_n$ *e* $I_n\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$, *entonces*

$$\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$$

que es la fórmula explícita de la solución del sistema.

NOTA 1.6 *El sistema anterior* $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ *admite una expresión bastante interesante: se puede sustituir por*

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + ... + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

lo cual es como decir que encontrar una solución equivale a afirmar que el vector $\overrightarrow{b}$ *se puede escribir como una combinación linela de los vectores columna de la matriz. Esto a su vez, es lo mismo que decir que* $\overrightarrow{b}$ *está en el conjunto imagen de la aplicación lineal que tiene como matriz asociada a* A. *Este conjunto imagen es de hecho el genreado por los vectores columna de* A.

1.5. Ejercicios

1. Utilizar operaciones elementales para reducir las matrices dadas a su matriz escalonada

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Resolver los siguientes sistemas mediante el método de Gauss:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - +2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 0 \end{array} \right. .$$

3. Utilizar el teorema de Rouché-Frobenius para realizar un estudio del número de soluciones de los siguientes sistemas:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 = 3 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. .$$

4. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes y en caso de que sean linealmente dependientes encontrar una combinación lineal entre ellos:

   a) $\{(3,5,1)\,,\ (2,1,3)\}$
   b) $\{(1,2,3)\,,\ (1,3,2)\,,(0,-1,1)\}$
   c) $\{(1,0,1,0)\,,\ (2,1,3,1)\,,\ (0,1,1,1)\,,\ (2,2,4,2)\}\,.$

5. Calcular el rango de los siguientes conjuntos de vectores:

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \ b) \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 6 & -5 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Estudiar su compatibilidad y encontrar la solución general de los sistemas

$$a) \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 \ = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 \ = 0 \end{array} \right. , \ b) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{array} \right. .$$

8. Demostrar que todo conjunto con $n+1$ vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.

9. Dadas $f(x) = x^2 + 7$, $g(x) = 3x - 5$, y $h(x) = \sin x$, funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, calcular $h \circ g \circ f$, $g \circ h \circ g$ y $g \circ h \circ f$.

10. Escribir las matrices de las siguientes aplicaciones lineales:

    a) $f(x, y, z) = (x + y,\ 2x - z)$
    b) $f(x, y, z) = (x - y,\ x + 2y,\ 2x - 3z)$
    c) $f(x, y, z) = 3x - y + z$.

11. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $f(x, y) = (x + y,\ 2x - y)$, hallar la imagen mediante f de las siguientes regiones:

    a) $\{(x, y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$
    b) $\{(x, y) : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

12. Hallar la matriz de un giro de ángulo ψ en sentido positivo en $\mathbb{R}^2$.

13. Hallar la matriz (en $\mathbb{R}^3$) de la simetría con respecto al plano $x = y$.

14. Demostrar que las aplicaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y,\ x + 2y)$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (2x - y,\ -x + y)$ son inversas una de la otra.

15. Dadas $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = \cos x$, aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, calcular $g \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f^{-1} \circ g$.

16. Encontrar, si es posible, la inversa de las siguientes matrices:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 1/a \\ a & -1 \end{pmatrix} \ (a \neq 0), \quad f) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \ (a \neq 0)$$

17. Encontrar, si es posible, la inversa de las siguientes aplicaciones lineales

    a) $f(x, y, z) = (x + y + z,\ 2x + z,\ x + y + 2z)$

    b) $f(x, y) = (x + +cy,\ x - cy)$.

18. Encontrar A^{-1} y resolver el sistema $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ para:

    a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \\ -5 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix}$

    b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

19. Resolver los siguientes sistemas:

$$a) \left\{ \begin{array}{c} x - y + z = 4 \\ -x + 2y - z + 2t = -3 \\ x - y + 5z + 2t = 16 \\ 2y + 2z + 6t = 8 \end{array} \right. , \quad b) \ \left\{ \begin{array}{c} x + y = 5 \\ -y + 5z = 2 \\ x + 2y - z = 7 \end{array} \right. .$$